数理解析研究所講究録
503巻 1983年 110-136

旗多様体上のある種のholonomic systemのcharacteristic cycleとWeyl群の表現について

東北大理　谷崎俊之 (Toshiyuki Tanisaki)

§0. 序

Beilinson-Bernstein [BB] は半単純Lie環の表現と旗多様体上の $\mathcal{D}$-加群との間のある種の対応を与えた（§1参照）。highest weight module や Harish-Chandra module に対応する $\mathcal{D}$-加群はいわゆる確定特異点型のholonomic系 (regular holonomic system) になる。そこで regular holonomic system に関する解析的な深い結果 (e.g. [KK], [K], …) を用いる事により irreducible highest weight module の指標公式に関する Kazhdan-Lusztig予想 [KL1] が証明された (Brylinski-Kashiwara [BK], Beilinson-Bernstein [BB], また Harish-Chandra module については Vogan [V])。またこれからもこの観点のもとで新結果が生み出されるものと期待される。

この小論では，highest weight module に対応する regular holonomic system の characteristic cycle に関する筆者の予想 ([T; ChII 予想1]) の解決 (Kashiwara-Tanisaki [KT])

を報告する。なお [KT] では highest weight module の場合のみを扱っているが Harish-Chandra module についても同様の結果が成立するので本稿ではこの場合も含めて取り扱う事にする。

§1. 幾つかの abelian category の同値

$\boxed{1.1}$ Beilinson-Bernstein theory

G を $\mathbb{C}$ 上の連結半単純代数群，B を G の Borel 部分群とし，G, B の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}$ と書く。旗多様体 $\mathcal{B} = G/B$ 上の線型偏微分作用素のつくる層を $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ とする（以下 algebraic な category で考える）。G の $\mathcal{B}$ への自然な作用から Lie 環の準同型 $\mathfrak{g} \longrightarrow \{\mathcal{B}$ 上の global な vector field$\}$ が導かれる。よって $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ から $\Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{D}_{\mathcal{B}})$ への algebra homomorphism が定まる。これを $U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{D} \Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{D}_{\mathcal{B}})$ と書く。

Prop. 1 (Beilinson-Bernstein [BB])

D は全射で $\mathrm{Ker}\, D = U(\mathfrak{g})(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}U(\mathfrak{g}))$。

（但し $\mathfrak{z}$ は $U(\mathfrak{g})$ の中心）

$R = U(\mathfrak{g}) / \mathrm{Ker}\, D$ $(\cong \Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}))$ とおく。有限生成 R-module M (i.e. trivial central character を持つ有限生成 $U(\mathfrak{g})$-module) に対して $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \otimes_R M$ は coherent $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$-Module になるが，この

functor $M \rightsquigarrow \mathcal{D}_B \otimes_R M$ は category の同値を与える。すなわち、

「**Th. 1** (Beilinson–Bernstein [BB])

$$\begin{array}{ccc} \{\text{有限生成 } R\text{-module}\} & \xrightarrow{\ \sim\ } & \{\text{coherent } \mathcal{D}_B\text{-Module}\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ M & \longmapsto & \mathcal{D}_B \otimes_R M \\ \Gamma(B, \mathfrak{M}) & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{M} \end{array}$$
」

remark　Th1 では central character が trivial な場合のみしか述べてないが、一般の central character χ に対しても $\mathcal{D}_B$ を "twist" して local には $\mathcal{D}_B$ と同型な層 $\mathcal{D}_B^{(\chi)}$ が定まり、これに対して Th1 と同様の事実が成立する([BB])。

$\boxed{1.2}$ Riemann–Hilbert 対応

coherent $\mathcal{D}_B$-Module のうちで、以下扱うのは regular holonomic $\mathcal{D}_B$-Module である。regular holonomic $\mathcal{D}_B$-Module $\mathfrak{M}$ に対して、その"解" $DR(\mathfrak{M}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_B}(\mathcal{O}_B, \mathfrak{M})$ はいわゆる perverse complex である。すなわち cohomology sheaf $\mathcal{H}^i(DR(\mathfrak{M}))$ は constructible で $\operatorname{codim} \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(DR(\mathfrak{M})) \geq i$ $(\forall i \geq 0)$。

「**Th 2** (Kashiwara [K])

$$\begin{array}{ccc} \{\text{regular holonomic } \mathcal{D}_B\text{-Module}\} & \simeq & \{\text{perverse complex on } B\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathfrak{M} & \longmapsto & DR(\mathfrak{M}) \end{array}$$
」

$\boxed{1.3}$ Highest weight modules

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{b}$ に含まれる Cartan 部分環とし，Δ, W をそれぞれ $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の root 系及び Weyl 群とする。正 root 系 Δ^+ を $\mathfrak{b}$ と対応して定めて $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha\in\mathfrak{h}^*$ とおく。$w\in W$ に対して $-w\rho-\rho$ を highest weight とする Verma module を M_w，その simple quotient を L_w と書く。

$$\tilde{\mathcal{O}}_0(\mathfrak{g},B)=\tilde{\mathcal{O}}_0=\left\{\begin{array}{l}\text{有限生成 } R\text{-module で}\\ U(\mathfrak{b})\text{-module として locally finite}\end{array}\right\}$$

とおくとき $M_w, L_w\in\tilde{\mathcal{O}}_0$ である。また $\tilde{\mathcal{O}}_0$ の Grothendieck 群を $K(\tilde{\mathcal{O}}_0)$ とするとき

$$K(\tilde{\mathcal{O}}_0)=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{Q}[M_w]=\bigoplus_{w\in W}\mathbb{Q}[L_w]$$

となる。（以下 Grothendieck 群は常に係数 $\mathbb{Q}$ で考える事にする。）

$$\left(\begin{array}{l}\tilde{\mathcal{U}}(\mathfrak{g},B)=\tilde{\mathcal{U}}=\{\text{regular holonomic } \mathcal{D}_{\mathcal{B}}\text{-Module with } B\text{-action}\}\\ \tilde{\mathcal{P}}(\mathfrak{g},B)=\tilde{\mathcal{P}}=\{\text{perverse complex on } \mathcal{B} \text{ with } B\text{-action}\}\end{array}\right.$$

とおく。$\mathcal{B}_w=BwB/B$ (Schubert cell) とする。このとき Th1,2 の対応のもとで

「**Prop 2**

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{\mathcal{O}}_0 & \xrightarrow[\sim]{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}\otimes_R(\cdot)} & \tilde{\mathcal{U}} & \xrightarrow[\sim]{DR} & \tilde{\mathcal{P}}\\
\Psi & & \Psi & & \Psi\\
M_w & \longleftrightarrow & \tilde{\mathcal{M}}_w & \longleftrightarrow & \mathbb{C}_{\mathcal{B}_w}[-\operatorname{codim}\mathcal{B}_w]\\
L_w & \longleftrightarrow & \tilde{\mathcal{L}}_w & \longleftrightarrow & {}^{\pi}\mathbb{C}_{\mathcal{B}_w}[-\operatorname{codim}\mathcal{B}_w]
\end{array}$$
」

但し ${}^{\pi}\mathbb{C}_{\mathcal{B}_w}$ は $\mathbb{C}_{\mathcal{B}_w}$ の DGM-拡大，$[-\mathrm{codim}\,\mathcal{B}_w]$ は complex としての degree の shift である。$\tilde{\mathcal{M}}_w, \tilde{\mathcal{L}}_w$ は holonomic system の言葉で書けるがここでは省略する。

1.4 Harish-Chandra modules

$G_{\mathbb{R}}$ を G の1つの real form とする（連結とは限らない）。$G_{\mathbb{R}}$ の極大 compact 部分群 $K_{\mathbb{R}}$ の複素化を K $(\subset G)$ と書く。

$\mathcal{H}(\mathfrak{g},K) = \{$Trivial central character を持つ $(\mathfrak{g},K)$-module で有限の組成列を持つもの$\}$

$\mathcal{M}(\mathfrak{g},K) = \{$regular holonomic $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$-Module with K-action$\}$

$\mathcal{F}(\mathfrak{g},K) = \{$perverse complex on $\mathcal{B}$ with K-action$\}$

とするとき，Th 1, 2 の対応のもとで

Prop 3

$$\mathcal{H}(\mathfrak{g},K) \xrightarrow[\sim]{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}\otimes_{R}(\cdot)} \mathcal{M}(\mathfrak{g},K) \xrightarrow[\sim]{DR} \mathcal{F}(\mathfrak{g},K)$$

$\mathcal{B}$ 上の K-orbit の分類は Matsuki [M] にある。特に

Prop 4 (Matsuki [M])

(i) $\#|K\backslash\mathcal{B}| < \infty$

(ii) $x\in\mathcal{B}$ に対して $K_x/(K_x)_0$ は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の何個かの直積

（但し $K_x = \{k\in K \mid k\cdot x = x\}$）

いま $x\in\mathcal{B}$ を含む K-orbit を O とする。$K_x/(K_x)_0$ の character γ に対して O 上の local system が自然に定まる。

これを $\mathcal{S}_{(O,\delta)}$ と書く。このとき $\mathcal{S}_{(O,\delta)}[-\mathrm{codim}\,O]$, ${}^{\pi}\mathcal{S}_{(O,\delta)}[-\mathrm{codim}\,O]$ $\in \mathcal{F}(\mathfrak{g},K)$ であり、$\mathcal{F}(\mathfrak{g},K)$ の simple object の全体は (O,δ) を動かすときの ${}^{\pi}S_{(O,\delta)}[-\mathrm{codim}\,O]$ である。$S_{(O,\delta)}[-\mathrm{codim}\,O]$, ${}^{\pi}S_{(O,\delta)}[-\mathrm{codim}\,O]$ に対応する $\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)$ (resp. $\mathcal{H}(\mathfrak{g},K)$) の object をそれぞれ $\mathfrak{M}_{(O,\delta)}$, $\mathfrak{L}_{(O,\delta)}$ (resp. $M_{(O,\delta)}$, $L_{(O,\delta)}$) と書く。このとき

$$\begin{cases} K(\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)) = \bigoplus_{(O,\delta)} \mathbb{Z}[\mathfrak{M}_{(O,\delta)}] = \bigoplus_{(O,\delta)} \mathbb{Z}[\mathfrak{L}_{(O,\delta)}] \\ K(\mathcal{H}(\mathfrak{g},K)) = \bigoplus_{(O,\delta)} \mathbb{Z}[M_{(O,\delta)}] = \bigoplus_{(O,\delta)} \mathbb{Z}[L_{(O,\delta)}] \end{cases}$$

となる。尚 上の $L_{(O,\delta)}$ が Langlands classification でのどの parameter に対応しているかも [V] に述べられている。

remark 既約 Harish-Chandra module $L_{(O,\delta)}$ の指標を求める問題は上の事等から $\mathcal{H}^c({}^{\pi}S_{(O,\delta)})|_{O'}$ を計算する事に帰着されるが、これは [LV] でなされている。

$\boxed{1.5}$ $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)) \cong K(\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g},B))$

$G_1 = G\times G$, $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, $K=\Delta G=\{(g,g)\in G\times G \mid g\in G\}$ として $\mathcal{M}(\mathfrak{g}_1, K)=\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)$ を考えよう。$\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ の ΔG-orbit への分解は Bruhat 分解から

$$\mathcal{B}\times\mathcal{B}=\coprod_{w\in W} Y_w \qquad (Y_w=\Delta G\cdot(eB,wB))$$

で与えられる。各 Y_w は単連結なので、$\mathfrak{M}_w=\mathfrak{M}_{(Y_w,1)}$, $\mathfrak{L}_w=\mathfrak{L}_{(Y_w,1)}$

とおくとき

$$K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)) = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[\mathcal{M}_w] = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[\mathcal{L}_w]$$

となる。

「Proposition 5

functor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G) & \longrightarrow & \hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}, B) \\ \Psi & & \Psi \\ \mathcal{M} & \longmapsto & \mathcal{M}|_{\{eB\}\times B} \end{array}$$

により

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)) & \xrightarrow{\sim} & K(\hat{\mathcal{U}}(\mathfrak{g}, B)) \\ \Psi & & \Psi \\ [\mathcal{M}_w] & \longmapsto & [\tilde{\mathcal{M}}_w] \\ [\mathcal{L}_w] & \longmapsto & [\tilde{\mathcal{L}}_w] \end{array}$$

」

§2. characteristic cycle

$\boxed{2.1}$ 定義の復習

一般に non-singular algebraic variety X 上の holonomic $\mathcal{D}_X$-Module $\mathcal{M}$ に対して，その characteristic variety $Ch(\mathcal{M})$ が cotangent bundle T^*X の subvariety（純次元で次元は $\dim X$）として定義される。またその既約成分での multiplicity までこめて考えて characteristic cycle $\underline{Ch}(\mathcal{M})$ が T^*X の algebraic cycle として定義される。これについて簡単に復習する。

$\mathcal{D}_X$ の自然な filtration に関して $gr\mathcal{D}_X = p_*(\mathcal{O}_{T^*X})$ である。($T^*X \xrightarrow{p} X$)。holonomic $\mathcal{D}_X$-Module $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}$ の good filtration をひとつ決めて $gr\mathcal{M}$ を考えるとこれは $gr\mathcal{D}_X$-

Module である。よって coherent $\mathcal{O}_{T^*X}$-Module

$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{p^{-1}(gr\mathcal{D}_X)} p^{-1}(gr\mathcal{M})$ が定まる。このとき

$$Ch(\mathcal{M}) = supp(\hat{\mathcal{M}})。$$

また $Ch(\mathcal{M})$ の既約分解を $Ch(\mathcal{M}) = \bigcup_j \Lambda_j$ とする。p_j を

Λ_j の generic point として

$$m_j = (\text{the length of } \hat{\mathcal{M}}_{p_j} \text{ as an } \mathcal{O}_{T^*X, p_j}\text{-module})$$

とおくとき

$$\underline{Ch}(\mathcal{M}) = \sum_j m_j [\Lambda_j]$$

である。

$\boxed{2.2}$ 性質

まず次は容易。

「<u>Lemma 1</u>

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ が holonomic $\mathcal{D}_X$-Module で

$0 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3 \to 0$ が exact ならば

$\underline{Ch}(\mathcal{M}_2) = \underline{Ch}(\mathcal{M}_1) + \underline{Ch}(\mathcal{M}_3)$ 」

次に積分，引き戻しに関する functorial property を述べる。

「<u>Prop 6</u> non-singular algebraic variety X, Y の間の morphism $X \xrightarrow{f} Y$ があるとき

$$X \times_Y T^*Y \xrightarrow{\rho} T^*X \quad , \quad X \times_Y T^*Y \xrightarrow{\varpi} T^*Y$$

を natural map とする。

(i) $\mathcal{M}$ を holonomic (resp. regular holonomic) $\mathcal{D}_X$-Module とする。$\mathcal{M}$ の"積分"

$$\int_f \mathcal{M} := \mathbb{R}f_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M})$$

(f が proper なら)

は $\mathcal{D}_Y$-Module の bounded complex でその cohomology sheaf

$$\int_f^i \mathcal{M} := \mathcal{H}^i\left(\int_f \mathcal{M}\right)$$

は holonomic (resp. regular holonomic) $\mathcal{D}_Y$-Module。また

$\rho^{-1}(Ch(\mathcal{M})) \longrightarrow T^*Y$ が proper なら

$$\underline{Ch}\left(\int_f \mathcal{M}\right) = \varpi_* \circ \rho^*(\underline{Ch}(\mathcal{M}))$$

である。(但し、ϖ_*, ρ^* は algebraic cycle としての直像及び引き戻し。また $\mathcal{M}^\cdot$ が $\mathcal{D}_Y$-module の complex で $\mathcal{H}^i(\mathcal{M}^\cdot)$ が holonomic なとき $\underline{Ch}(\mathcal{M}^\cdot) := \sum_i (-1)^i \underline{Ch}(\mathcal{H}^i(\mathcal{M}^\cdot))$。)

(ii) $\mathcal{N}$ が holonomic (resp. regular holonomic) $\mathcal{D}_Y$-Module とする。$\mathcal{N}$ の引き戻し $\mathbb{L}f^*(\mathcal{N}) := \mathcal{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} f^{-1}(\mathcal{N})$ は $\mathcal{D}_X$-Module の bounded complex でその cohomology sheaf は holonomic (resp. regular holonomic) $\mathcal{D}_X$-Module。また

$\varpi^{-1}(Ch(\mathcal{N})) \longrightarrow T^*X$ が proper なら

$$\underline{Ch}(\mathbb{L}f^*\mathcal{N}) = \rho_* \circ \varpi^*(\underline{Ch}(\mathcal{N}))$$

である。 ┘

「Prop」 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を holonomic (resp. regular holonomic) $\mathcal{D}_X$-Module とする。また $T^*X \times_X T^*X \xrightarrow{p} T^*X$ を $(a,b) \longmapsto a+b$ により定義する。

このとき $Ch(\mathcal{M}) \times_X Ch(\mathcal{N}) \xrightarrow{p} T^*X$ が proper ならば

$$\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0 \quad (i \neq 0)$$

また $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ は holonomic (resp. regular holonomic) $\mathcal{D}_X$-Module で，

$$\underline{Ch}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}) = p_*(\underline{Ch}(\mathcal{M}) \times_X \underline{Ch}(\mathcal{N}))$$

である。 ⅃

$\boxed{2.3}$ $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$，$\tilde{\mathcal{M}}(\mathfrak{g}, B)$ の場合.

$\mathcal{M} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$ とすると $\# | K \backslash \mathcal{B} | < \infty$ なので $Ch(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{O: K\text{-orbit}} \overline{T_O^* \mathcal{B}}$ となる事がわかる。よって $\underline{Ch}(\mathcal{M}) \in \bigoplus_{O: K\text{-orbit}} \mathbb{Q}[\overline{T_O^* \mathcal{B}}]$ である。Lemma 1 により，

$\mathbb{Q}$-linear map

$$K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)) \xrightarrow{Ch} \bigoplus_O \mathbb{Q}[\overline{T_O^* \mathcal{B}}] \qquad (*)$$

が定義される。この特別な場合として

$$K(\mathcal{M}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)) \xrightarrow{Ch} \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Q}[\overline{T_{Y_w}^*(\mathcal{B} \times \mathcal{B})}] \qquad (**)$$

が得られる。また同様にして

$$K(\tilde{\mathcal{M}}(\mathfrak{g}, B)) \xrightarrow{Ch} \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Q}[\overline{T_{\mathcal{B}_w}^* \mathcal{B}}] \qquad (***)$$

が得られるが，$\mathcal{M} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$ と $\mathcal{M}|_{\{eB\} \times \mathcal{B}} \in \tilde{\mathcal{M}}(\mathfrak{g}, B)$ また $\overline{T_{Y_w}^*(\mathcal{B} \times \mathcal{B})}$ と $\overline{T_{\mathcal{B}_w}^* \mathcal{B}}$ を同一視するとき $(**)$ と $(***)$ は同じ写像である。

§3. W-module structure

$\boxed{3.1}$ $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)) \cong \mathbb{Q}[W]$ as an algebra

Lusztig-Vogan [LV] に従って $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G))$ に積を定義しよう。$\mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ から その (i,j)-成分への射影を $\mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{B} \xrightarrow{p_{ij}} \mathcal{B}\times\mathcal{B}$ $(1\leq i<j\leq 3)$ とする。このとき $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$ に対して

$$\int^i_{p_{13}} (\mathbb{L}p_{12}^{*}\mathcal{M}_1) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{B}}} (\mathbb{L}p_{23}^{*}\mathcal{M}_2) \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$$

である。そこで $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G))$ 上の積を

$$[\mathcal{M}_1]\cdot[\mathcal{M}_2] = \sum_i (-1)^i \left[\int^i_{p_{13}} (\mathbb{L}p_{12}^{*}\mathcal{M}_1) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{B}}} (\mathbb{L}p_{23}^{*}\mathcal{M}_2)\right]$$

により定義する。

「**Prop. 8** (Lusztig-Vogan [LV])

上の積構造により $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G))$ は環になりさらに

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Q}[W] \\ \Psi & & \Psi \\ [\mathcal{M}_w] & \longleftrightarrow & w \end{array}$$ 」

remark　Prop. 8 の同型対応で $[\mathcal{L}_w]$ に対応する $\mathbb{Q}[W]$ の元を $a(w)$ とすると、$a(w) = \sum_{y\leq w} (-1)^{\ell(w)+\ell(y)} P_{y,w}(1)\, y$ となる。ここで $\leq$ は Bruhat order，ℓ は長さ，$P_{y,w}$ は Kazhdan-Lusztig 多項式。

$\boxed{3.2}$ $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G))$ acts on $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K))$

$K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G))$ $(\cong \mathbb{Q}[W])$ の $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K))$ への作用を定義する。$\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ から第 i 成分への射影を $\mathcal{B}\times\mathcal{B} \xrightarrow{g_i} \mathcal{B}$ $(i=1,2)$ とする。$\mathcal{M} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$, $\mathcal{N} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$ に対して

$$\int_{g_1}^{i} \mathcal{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}} (\mathbb{L}\, g_2^{*} \mathcal{N}) \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K)$$

である。

「 <u>Prop. 9</u> (Lusztig - Vogan [LV])

$$[\mathcal{M}]\cdot[\mathcal{N}] = \sum_i (-1)^i \left[\int_{g_1}^{i} \mathcal{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}} (\mathbb{L}\, g_2^{*} \mathcal{N})\right]$$

$$(\mathcal{M} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G),\ \mathcal{N} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K))$$

により $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K))$ への $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G))$ の作用が定まる。 」

これにより $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}, K))$ は W-module になる。$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ の Weyl 群は $W\times W$ なので，特に $K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G))$ $(\cong \mathbb{Q}[W])$ は $W\times W$-module になるが，これは $\mathbb{Q}[W]$ の両側正則表現と一致している。

さて simple reflection $s \in W$ に対して対応する rank 1 の parabolic subgroup を P_s $(\supset B)$ として $\mathcal{P}_s = G/P_s$ とおく。また $\mathcal{B} \xrightarrow{\pi_s} \mathcal{P}_s$ を自然な射影とする。このとき [KT] と全く同様にして次がわかる。

「Prop 10　$\mathcal{M}\in\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)$ のとき

$$S\cdot[\mathcal{M}]=[\mathcal{M}]+\sum_i(-1)^i\,[\mathcal{H}^i(\mathbb{I}\,\pi_s^*\textstyle\int_{\pi_s}\mathcal{M})]$$ 」

$\boxed{3.3}$ Lusztig の Springer 表現

$\bigoplus_{O:K\text{-orbit}}\mathbb{C}[\overline{T_O^*\mathcal{B}}]$ に W-module structure を定義するのが以下の目的であるが，そのための準備として Lusztig の Springer 表現について復習する。

$\tilde{\mathfrak{g}}=\{(x,gB)\in\mathfrak{g}\times\mathcal{B}\mid x\in\mathrm{Lie}(gBg^{-1})\}$ とおき，$\tilde{\mathfrak{g}}\xrightarrow{\rho}\mathfrak{g}$ を自然な写像とする。また $\mathfrak{g}_{r.s}=\{\text{regular semisimple element in }\mathfrak{g}\}$，$\rho^{-1}(\mathfrak{g}_{r.s.})=\tilde{\mathfrak{g}}_{r.s}$，$\tilde{\mathfrak{g}}_{r.s}\xrightarrow{\rho_{r.s}}\mathfrak{g}_{r.s}$ とする。$\rho_{r.s.}$ は W-principa bundle なので $\rho_{r.s.*}(\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}_{r.s}})$ に W が作用する。DGM-拡張の functoriality により $\pi(\rho_{r.s*}(\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}_{r.s.}}))$ に W が作用する。ところが $\mathbb{R}\rho_*(\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})\cong\pi(\rho_{r.s.*}(\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}_{r.s}}))$ (Lusztig) なので $\mathbb{R}\rho_*(\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})$ は W-action を持つ。従って

$\mathcal{N}=\{\mathfrak{g}\text{ 中の nilpotent element}\}$，$\tilde{\mathcal{N}}=\rho^{-1}(\mathcal{N})$，$\tilde{\mathcal{N}}\xrightarrow{\rho_{\mathcal{N}}}\mathcal{N}$ とするとき $\mathbb{R}\rho_{\mathcal{N}*}(\mathbb{C}_{\tilde{\mathcal{N}}})\cong\mathbb{R}\rho_*(\mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})|\mathcal{N}$ は W-action を持つ。ここで $\tilde{\mathcal{N}}\cong T^*\mathcal{B}$ に注意しておく。

remark　$x\in\mathcal{N}$ のとき，上の事から $H^i(\mathcal{B}^x,\mathbb{C})\cong R^i\rho_{\mathcal{N}*}(\mathbb{C}_{\tilde{\mathcal{N}}})_x$ に W が作用する ($\mathcal{B}^x=\rho^{-1}(x)$)。これが通常の Springer 表現である。

$\boxed{3.4}$ W acts on $H_{2d}(Z^{(\mathfrak{g},K)},\mathbb{Q}) = \bigoplus_{O:K\text{-orbit}} \mathbb{Q}[\overline{T^*_O\mathcal{B}}]$.

K-orbit O に対して $Z_O^{(\mathfrak{g},K)} = \overline{T^*_O\mathcal{B}}$, $Z^{(\mathfrak{g},K)} = \bigcup_{O:K\text{-orbit}} Z_O^{(\mathfrak{g},K)}$ とおく。

$\dim\mathcal{B} = d$ とするとき, $Z^{(\mathfrak{g},K)}$ は純次元で $\dim Z^{(\mathfrak{g},K)} = d$。よって

$$H_{2d}(Z^{(\mathfrak{g},K)},\mathbb{Q}) := \left(H_c^{2d}(Z^{(\mathfrak{g},K)},\mathbb{Q})\right)^*$$
$$= \bigoplus_{O:K\text{-orbit}} \mathbb{Q}[Z_O^{(\mathfrak{g},K)}]$$

である。

K の Lie 環を $\mathfrak{k}$, また $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を Cartan 分解として,

$\mathcal{N}(\mathfrak{p}) = \mathcal{N}\cap\mathfrak{p}$ とおくとき, $Z^{(\mathfrak{g},K)} = \rho_{\mathcal{N}}^{-1}(\mathcal{N}(\mathfrak{p}))$ がすぐわかる。よって 3.3 から

$$\mathbb{H}_c^i(\mathcal{N}(\mathfrak{p}), R\rho_{\mathcal{N}*}(\mathbb{Q}_{\tilde{\mathcal{N}}})|_{\mathcal{N}(\mathfrak{p})})$$
$$= H_c^i(Z^{(\mathfrak{g},K)},\mathbb{Q})$$

に W-action が定義される。dual を取って $H_i(Z^{(\mathfrak{g},K)},\mathbb{Q})$ に W-action が定まる。従って特に

$$H_{2d}(Z^{(\mathfrak{g},K)},\mathbb{Q}) = \bigoplus_{O:K\text{-orbit}} \mathbb{Q}[\overline{T^*_O\mathcal{B}}]$$

に W が作用する。

この特別な場合として $Z = Z^{(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)}$ とおくとき

$$H_{4d}(Z,\mathbb{Q}) = \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Q}[\overline{T^*_{Y_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})}]$$

に $W\times W$ が作用する。

$\boxed{3.5}$ local formula

$H_{2d}(Z^{(\mathfrak{g},K)},\mathbb{Q})$ の W-module としての構造は, base

$\{[Z_O^{(g,k)}]\}_{O:K\text{-orbit}}$ に関する simple reflection $s \in W$ の変換則を与えれば決まる。この変換則の幾何学的表示を与える Hotta [H] の公式を述べよう。simple reflection s をひとつ固定する。$T^*P_s \times_{P_s} B \xhookrightarrow{\rho_s} T^*B$, $T^*P_s \times_{P_s} B \xrightarrow{\varpi_s} T^*P$ を自然な写像とする。

<u>定義</u> K-orbit O について

$$\begin{cases} O \text{ が s-vertical} \iff Z_O^{(g,k)} \subset \rho_s(T^*P_s \times_{P_s} B) \\ O \text{ が s-horizontal} \iff Z_O^{(g,k)} \not\subset \rho_s(T^*P_s \times_{P_s} B) \end{cases}$$

「<u>remark</u> $T^*B \subset N \times B \xrightarrow{\varphi} N \times P$ について,

O が s-vertical $\iff \dim \varphi(Z_O^{(g,k)}) = \dim Z_O^{(g,k)} - 1$

なので、この用法は [H] のものと compatible である。」

$x \in B$ に対して $L_x^s = \pi_s^{-1}(\pi_s(x))$ $(\cong \mathbb{P}^1)$ とおく。このとき次は容易に示される。

「<u>Lemma 2</u>

O が s-vertical $\iff$ $x \in O$ について $\overline{L_x^s \cap O} = L_x^s$

O が s-horizontal $\iff$ 〃 $\#|L_x^s \cap O| < \infty$ 」

これを $Z = Z^{(g\times g, \Delta G)}$ の場合に適用すると、

「<u>Cor</u> Y_w が $(s\times 1)$-vertical $\iff$ $sw < w$

〃 〃 -horizontal $\iff$ $sw > w$

〃 $(1\times s)$-vertical $\iff$ $ws < w$

〃 $(1\times s)$-horizontal $\iff$ $ws > w$ 」

「**Prop 11** (Hotta[H])　K-orbit $\mathcal{O}$ について

(i) $\mathcal{O}$ が s-vertical なら

$$s\cdot[Z_{\mathcal{O}}^{(\mathfrak{g},K)}] = -[Z_{\mathcal{O}}^{(\mathfrak{g},K)}]$$

(ii) $\mathcal{O}$ が s-horizontal なら

$$s[Z_{\mathcal{O}}^{(\mathfrak{g},K)}] = [Z_{\mathcal{O}}^{(\mathfrak{g},K)}] + \varpi_s^* \varpi_{s*} \rho_s^* ([Z_{\mathcal{O}}^{(\mathfrak{g},K)}])$$

また $\varpi_s^* \varpi_{s*} \rho_s^* ([Z_{\mathcal{O}}^{(\mathfrak{g},K)}]) \in \bigoplus_{\mathcal{O}'} \mathbb{Z}_{\geq 0} [Z_{\mathcal{O}'}^{(\mathfrak{g},K)}]$

ここで $\mathcal{O}'$ は $\mathcal{O}' \subset \overline{\pi_s^{-1}(\pi_s(\mathcal{O}))}$ なる s-vertical orbit をうごく。」

3.6 主定理

「**Main theorem**

3.2, 3.4 で定義された W-module structure に関して

$$K(\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)) \xrightarrow{\underline{Ch}} H_{2d}(Z^{(\mathfrak{g},K)}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\mathcal{O}} \mathbb{Q}[\overline{T_{\mathcal{O}}^* \mathcal{B}}]$$

は W-module として同型」

(証明について)

$\mathcal{M} \in \mathcal{M}(\mathfrak{g},K)$ のとき $\underline{Ch}(s\cdot[\mathcal{M}]) = s\,\underline{Ch}([\mathcal{M}])$ が任意の s について成立する事を示せばよい。$\underline{Ch}(\mathcal{M})$ がわかっているとき $s\cdot\underline{Ch}(\mathcal{M})$ は Prop 11 でわかる。また、$\underline{Ch}(s\cdot[\mathcal{M}])$ は Prop 10, 6, 7 等から計算されるのでこれらが一致する事がわかる。詳細は [KT] と同様。 //

3.7で述べる様に、$\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)$の場合には、この主定理は(少なくともWeyl群の表現論という観点からは)意味がはっきりしているが、一般の場合にこれが何を意味するかはよくわからない。この定理に何らかの表現論的意味を与える事が今後の問題である。

$\boxed{3.7}$ cell表現とSpringer表現

主定理を$\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)$の場合に考えよう。3.1により$K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G))\cong\mathbb{Q}[W]$であった。また同型写像は

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)) & \xrightarrow{R} & \mathbb{Q}[W] \\ \cup & & \cup \\ [\mathcal{M}_w] & \longmapsto & w \end{array}$$

により与えられていた。さて主定理から、次の事がわかる。

$$(※)\left(\begin{array}{l} W\times W\text{-module として} \\ \begin{array}{ccc} H_{4d}(Z,\mathbb{Q}) & \xrightarrow[\sim]{R'} & \mathbb{Q}[W] \\ \cup & & \cup \\ [Z_e] & \longmapsto & e \end{array}\end{array}\right.$$

(但し $Z_w=\overline{T^*_{Y_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})}$)

実際、この場合 $\underline{Ch}$ は同型写像で、$\underline{Ch}(\mathcal{M}_e)=[Z_e]$。

(もっとも(※)は主定理を使わなくても直接証明できる。[KL2]参照)

そこで次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd} K(\mathcal{M}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g},\Delta G)) \arrow[rr, "Ch"] \arrow[dr, "R"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & H_{4d}(Z,\mathbb{Q}) \arrow[dl, "R'"] \\ & \mathbb{Q}[W] & \end{tikzcd}$$

これが [KT] の主定理であった。

$$a(w) = \mathcal{R}([\mathcal{L}_w]) \quad , \quad b(w) = \mathcal{R}'([Z_w])$$

とおく。基底 $\{a(w)\}_{w\in W}$ は Weyl 群の cell 表現に、また基底 $\{b(w)\}_{w\in W}$ は Weyl 群の Springer 表現に対応しているので、cell 表現と Springer 表現の関係は 2つ 基底の変換行列を与える事によりわかる。これは次で与えられる。

$$\underline{Ch}(\mathcal{L}_w) = \sum_y m_y(\mathcal{L}_w)[Z_y] \Longrightarrow a(w) = \sum_y m_y(\mathcal{L}_w) b(y).$$

$m_y(\mathcal{L}_y) = 1$, $m_y(\mathcal{L}_w) \neq 0 \Rightarrow y \leq w$ ($\Leftrightarrow \mathcal{B}_y \subset \overline{\mathcal{B}_w}$) なので、例えば

$$a(w) \in b(w) + \sum_{y<w} \mathbb{Z}_{\geq 0}\, b(y)$$

がわかる。Kazhdan-Lusztig [KL2] は $G = SL_n(\mathbb{C})$ なら $a(w) = b(w)$ であろうと予想しているが、これは次と同値である。

__予想__ $G = SL_n(\mathbb{C}) \Longrightarrow Ch(\mathcal{L}_w) = \overline{T^*_{Y_w}(\mathcal{B}\times\mathcal{B})}$

§4. K-orbits on $\mathcal{B}$ (d'apres Matsuki [M])

今後 Harish-Chandra module の研究において K の $\mathcal{B}$ への作用に関する軌道分解の様子が重要になってくると思われるので、Matsuki [M] の結果(の一部分)をここにまとめておく。なお簡単のため Borel 部分環, Cartan 部分環をそれぞれ BSA, CSA と略記する。

$\boxed{4.1}$ parametrization

$G_{\mathbb{R}}$ を G（$\mathbb{C}$ 上の半単純連結代数群）の real form とする（連結性は仮定しない）。$G_{\mathbb{R}}$ の極大 compact 部分群 $K_{\mathbb{R}}$ の複素化を K とする。また $G, G_{\mathbb{R}}, K, K_{\mathbb{R}}$ の（連結成分の）Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}, \mathfrak{k}_0$ と書く。$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0\oplus\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を Cartan 分解（及びその複素化）とし、Cartan involution を θ とかく。$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_0$ に関する共役を τ とする。

旗多様体 $\mathcal{B}=G/B$ を $\mathfrak{g}$ の BSA の全体と同一視するとき、$K\backslash\mathcal{B} \longleftrightarrow \{\mathfrak{g}\text{ の BSA}\}/\underset{K}{\sim}$ である。

Lemma 3

(i) 任意の BSA $\mathfrak{b}$ は θ-stable な $\mathfrak{g}$ の CSA を含む。

(ii) $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の θ-stable な CSA とするとき、K の連結成分 K_0 の元 k が存在して、$k\cdot\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}_0$ の θ-stable CSA の複素化になる。

$\mathfrak{g}_0$ の θ-stable CSA $\mathfrak{h}_0$ と $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ の正 root 系 Δ^+ に対して、$\mathfrak{b}(\mathfrak{h}_0,\Delta^+)=(\mathfrak{h}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\oplus\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_\alpha\right)$ とおく。（$\mathfrak{g}_\alpha$ は root space。）Lemma 3 により任意の BSA はある $\mathfrak{h}_0, \Delta^+$ に対する $\mathfrak{b}(\mathfrak{h}_0,\Delta^+)$ と K_0-共役である。

Lemma 4 $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_0'$ を $\mathfrak{g}_0$ の θ-stable CSA, Δ^+, Δ'^+ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ 及び $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0'\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ の正 root 系とするとき

$$b(\mathfrak{h}_0,\Delta^+)\underset{K}{\sim} b(\mathfrak{h}_0',\Delta'^+)\Longleftrightarrow \begin{array}{l}\exists k\in K_{\mathbb{R}}\ \text{s.t.}\\ \left(\begin{array}{l} k\cdot\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_0' \\ \text{かつ} \\ k\cdot b(\mathfrak{h}_0,\Delta^+)=b(\mathfrak{h}_0',\Delta'^+)\end{array}\right)\end{array}$$

$\mathfrak{g}_0$ の θ-stable CSA $\mathfrak{h}_0$ に対して、$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ の Weyl 群を $W(\mathfrak{h}_0)$ とする。また $W(\mathfrak{h}_0;K_{\mathbb{R}})=N_G(\mathfrak{h}_0)\cap K_{\mathbb{R}}/Z_G(\mathfrak{h}_0)\cap K_{\mathbb{R}}$ $(\subset W(\mathfrak{h}_0))$ とおく。

$$\{\mathfrak{g}_0\text{ の CSA}\}/\underset{G_{\mathbb{R}}}{\sim}\ \longleftrightarrow\ \{\mathfrak{g}_0\text{ の }\theta\text{-stable CSA}\}/\underset{K_{\mathbb{R}}}{\sim}$$

なので以上の事をまとめて、

「<u>Prop. 12</u>

$\mathfrak{g}_0$ の CSA の $G_{\mathbb{R}}$-共役類の完全代表系 $\{\mathfrak{h}_0^{(i)}\mid i\in I\}$ を各 $\mathfrak{h}_0^{(i)}$ が θ-stable になるようにとる。このとき、

$$K\backslash\mathcal{B}\ \longleftrightarrow\ \coprod_{i\in I} W(\mathfrak{h}_0^{(i)};K_{\mathbb{R}})\backslash W(\mathfrak{h}_0^{(i)})$$

で、対応は各 $i\in I$ に対して $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0^{(i)}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ の正 root 系 $\Delta^+_{(i)}$ をひとつずつ固定するとき

$$b(\mathfrak{h}_0^{(i)},w\Delta^+_{(i)})\ \longleftrightarrow\ W(\mathfrak{h}_0^{(i)};K_{\mathbb{R}})w$$

によりあたえられる。 」

<u>remark</u> $\mathfrak{g}_0$ の CSA の分類については、Sugiura [S]、Warner [W] を参照。特に $\#|\{\mathfrak{g}_0\text{ の CSA}\}/\underset{G_{\mathbb{R}}}{\sim}|<\infty$ なので $\#|K\backslash\mathcal{B}|<\infty$

$\boxed{4.2}$ K-orbit の諸性質

以下 $\mathfrak{g}_0$ の θ-stable CSA $\mathfrak{h}_0$ ($\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) を固定し、$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root系, Weyl群 をそれぞれ Δ, W とかく。さらに正root系 Δ^+ を固定して, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\mathfrak{h}_0, \Delta^+)$, 対応する Borel 部分群 B と書く。$\mathfrak{b}$ を通る K-orbit を $\mathcal{O}$ と書くとき, $\mathcal{O} \cong K/K_{\mathfrak{b}}$ (但し $K_{\mathfrak{b}} = \{k \in K \mid k\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\} = K \cap B$) である。

「<u>Prop 13</u> $H_{\mathbb{R}} = Z_{G_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{h}_0)$, $H = Z_G(\mathfrak{h})$ とおくとき,

$$K_{\mathfrak{b}}/(K_{\mathfrak{b}})_0 = K\cap B/(K\cap B)_0 \cong K\cap H/(K\cap H)_0 \cong K_{\mathbb{R}}\cap H_{\mathbb{R}}/(K_{\mathbb{R}}\cap H_{\mathbb{R}})_0$$

$$\cong H_{\mathbb{R}}/(H_{\mathbb{R}})_0 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^N$$

(但し $0 \leqq {}^{\exists}N \leqq \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0)$)」

「<u>Prop 14</u>

(i) $\mathfrak{b}$ を含む K-orbit $\mathcal{O}$ が open

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0 \text{ は } \mathfrak{p}_0 \text{ の max. abelian subspace} \\ \qquad (\mathfrak{h}_0 \text{ は normal CSA}) \\ \bullet\ \Delta_0 = \{\alpha \in \Delta \mid \tau(\alpha) = -\alpha\} \text{ とおくとき } \tau(\Delta^+ - \Delta_0) = \Delta^+ - \Delta_0 \end{cases}$$

(ii) $\mathfrak{b}$ を含む K-orbit $\mathcal{O}$ が closed

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \bullet\ \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k}_0 \text{ は } \mathfrak{k}_0 \text{ の CSA} \\ \qquad (\mathfrak{h}_0 \text{ は fundamental CSA}) \\ \bullet\ \theta(\Delta^+) = \Delta^+ \end{cases}$$

」

remark open orbit は唯一つ(あたりまえ)。closed orbit の数は $\#|W(\mathfrak{h}_0; K_{\mathbb{R}})\backslash W(\mathfrak{h}_0)_\theta|$ と一致する。ここで $\mathfrak{h}_0$ は θ-stable な fundamental CSA (共役を除いて unique), また $W(\mathfrak{h}_0)_\theta = \{w \in W(\mathfrak{h}_0) \mid \theta w = w\theta\}$。

「Prop. 15 $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\mathfrak{h}_0, \Delta^+)$ の nilpotent radical を $\mathfrak{n}^+$ とする。また, $\Delta_I = \{\alpha \in \Delta \mid \theta(\alpha) = \alpha\}$, $\Delta_{I,\mathfrak{p}} = \{\alpha \in \Delta_I \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}\}$ とおくとき,

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} \mathcal{O} &= \dim(\mathfrak{n}^+ \cap \mathfrak{p}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\#|\Delta_{I,\mathfrak{p}}| + \#|(\Delta^+ \cap \theta(\Delta^+)) - \Delta_I|\right) \end{aligned}$$
」

§5. 補足

$\boxed{5.1}$ 講演では $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal の associated variety の既約性についても述べた([KT], [J2])。[KT] では integral case のみにしか言及していないが, non-integral の場合も同様に正しい。[KT] で Borho-Brylinski の未発表の結果として引用した定理の証明は(少なくとも筆者が柏原氏に教えて頂いたのは) $\mathcal{D}$-Module を用いるものであるが, Joseph [J2] はこの部分を Casselman functor なるものを用いて $U(\mathfrak{g})$-module だけの範囲で証明しているようである。なお Brylinski からの私信によると, 上記の Borho-Brylinski の定理は彼等の一連の論文の Part III に書く予定との

事である。

$\boxed{5.2}$ 本稿の主定理は Harish-Chandra module，あるいは半単純 Lie 群の無限次元表現の研究を念頭においたもので，そのような応用が望まれるが，ここで見方を変えて Weyl 群の表現論の観点から見直してみよう。

まず次は [KL2] と全く同様にして示される。

「**Lemma 5**

$$H_{2d}(Z^{(\mathfrak{g},K)}, \mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{x \in K\backslash V(\mathfrak{g})} H_{2d_x}(\mathcal{B}^x)^{C_K(x)} \quad \text{as a } W\text{-module}$$

$$(d_x = \dim \mathcal{B}^x, \quad C_K(x) = Z_K(x)/Z_K(x)^0 \qquad 」$$

一般には，W-module としての全射準同型

$$(*) \quad K(\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)) \xrightarrow{Ch} H_{2d}(Z^{(\mathfrak{g},K)}, \mathbb{Q})$$

があるわけだが，$\mathfrak{g}_0$ が共役を除いて唯一つの CSA を持つ場合には $(*)$ は同型写像になる。実際この場合任意の BSA $\mathfrak{b}$ に対して $K_{\mathfrak{b}}$ が連結になる事が Prop 13 と [V; Prop. 1.4.1.4] からわかる。G, K の Weyl 群をそれぞれ W, $W(K)$ とすると Prop. 12 から $K\backslash\mathcal{B}$ は $W(K)\backslash W$ で parametrize される。よって $W(K)w$ に対応する K-orbit を O_w と書くとき，

$$K(\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)) = \bigoplus_{w \in W(K)\backslash W} \mathbb{Q}\,[\mathcal{M}(O_w, 1)]$$

となる。[LV] により simple reflection s の作用に関して

$$s \cdot (-1)^{\dim O_w} [\mathcal{M}(O_w, 1)] = -(-1)^{\dim O_{ws}} [\mathcal{M}(O_{ws}, 1)]$$

なので

$$K(\mathcal{U}(\mathfrak{g},\mathfrak{k})) \cong \mathrm{Ind}_{W(\mathfrak{k})}^{W}(1)\otimes \mathrm{sgn}$$

となる。 以上まとめて

「<u>Prop. 16</u> $\mathfrak{g}_0$ が共役を除いて唯一つの CSA を持つとき,

$$\mathrm{Ind}_{W(\mathfrak{k})}^{W}(1)\otimes \mathrm{sgn} \cong \bigoplus_{X\in K\backslash \mathcal{N}(\mathfrak{p})} H^{2d_X}(\mathcal{B}^X)^{C_K(X)}$$ 」

$(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \Delta G)$ のときが [KL2] の場合として一致して

$$\left[\ \mathbb{C}[W] \cong \bigoplus_{X\in G\backslash\mathcal{N}} \left(H^{2d_X}(\mathcal{B}^X)\otimes H^{2d_X}(\mathcal{B}^X)\right)^{C(X)} \right.$$
$$\left. \qquad (C(X)=Z_G(X)/Z_G(X)^0) \right.$$

となり、これから Springer の完全性定理が得られるのであった。

$\mathfrak{g}_0$ が complex simple Lie algebra の non-compact real form であって, 唯一つの CSA を持つのは次の場合である。

① $\mathfrak{g}=A_{2m-1}$, $\mathfrak{k}=C_m$

② $\mathfrak{g}=D_m$, $\mathfrak{k}=B_{m-1}$

③ $\mathfrak{g}=E_6$, $\mathfrak{k}=F_4$

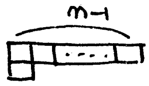
①②の場合に Prop. 16 を具体的に書いてみると次の様になる。

① $2m$ の分割 σ に対応する S_{2m} の既約表現を χ_σ とおくとき,

$$\mathrm{Ind}_{W(C_m)}^{S_{2m}}(1)\cong \bigoplus \chi_\sigma$$

但し, σ は各 part が even である様な $2m$ の分割を全て動く。

② $\mathrm{Ind}_{W(B_{m-1})}^{W(D_m)}(1) \cong 1 \oplus \chi$

ここで χ は通常の約束で ( , ϕ) に対応する既約表現である。

①の場合は元来岩堀先生が予想されていたもので [Th] にその証明がある。②の場合はいずれにしろ簡単にわかる事であろう。

REFERENCES

[BB] Beilinson, A. and Bernstein, J. : Localisation de g-modules; Comptes Rendus, 292A, 15-18 (1981).

[BK] Brylinski, J. L. and Kashiwara, M. : Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems; Invent. math. 64, 387-410 (1981).

[H] Hotta, R. : On Joseph's construction of Weyl group representations; preprint (1982).

[J1] Joseph, A. : On the variety of a highest weight module; to appear in J. Alg.

[J2] ——— : On the associated variety of a primitive ideal; preprint (1983).

[K] Kashiwara, M. : The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems; preprint (1983).

[KK] ——— and Kawai, T. : On holonomic systems of micro-differential equations, III.; Publ. RIMS. Kyoto Univ. 17 813-979 (1981).

[KL1] Kazhdan, D. and Lusztig, G. : Representations of Coxeter groups and Hecke algebras; Invent. math. 53, 165-184 (1979).

[KL2] ——— and ——— : A topological approach to Springer's representations; Adv. in Math. 38, 222-2228 (1980).

[KT] Kashiwara, M. and Tanisaki, T. : The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold. -related to the Weyl group algebra-; preprint (1983).

[LV] Lusztig, G. and Vogan, D. : Singularities of closures of K-orbits on flag manifolds; Invent. math. 71, 365-379 (1983).

[M] Matsuki, T. : The orbits of affin symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups; J. Math. Soc. Japan 31, 331-357 (1979).

[S] Sugiura, M. : Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras; J. Math. Soc. Japan 11, 374-434 (1959).

[T] Tanisaki, T. : Representation theory of complex semisimple Lie algebras and $\mathcal{D}$-Modules; in Reports of the 5-th seminar on algebra II, 67-163 (1983).

[V] Vogan, D. : Irreducible characters of semisimple Lie groups III; Invent. math. 71, 381-417 (1983).

[W] Warner, G. : Harmonic analysis on semisimple Lie groups I; Springer Verlag, 1972.

[Th] Thompson, J. G. : Fixed point free involutions and finite projective planes; in:Finite simple groups II. Proc. Sympos. Univ. Durham 1978, 321-337 Academic Press, 1980.